

$$W_k = \{(x, y) \mid x^2 + kxy + y^2 = 0\}.$$

$$(0,0) \in W_k$$

quando $W_k \subseteq \mathbb{R}^2$?

$$\text{Se } k = \pm 2 \Rightarrow W_k = \{(x, y) \mid x^2 \pm 2xy + y^2 = 0\} =$$

$$= \{(x, y) \mid (x \pm y) = 0\} \Rightarrow W_{-2} \text{ e } W_{+2} \text{ sono s.o.k.}$$

$$k > 2 \quad \Delta = k^2 y^2 - 4y^2$$

$$\text{se } \Delta < 0 \text{ cioè } k^2 y^2 < 4y^2 \Leftrightarrow |k| < 2$$

cioè $-2 < k < 2$

$\Rightarrow$ l'unico vettore contenuto in W_k

$$\text{è } (0,0) \Rightarrow W_k = \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ sottospazio}$$

$x > 0 \Rightarrow V_y$ c'è un ci sono 2 punti

(x_1, y) e $(x_2, y) \in W_k$

$$x = \frac{-ky \pm \sqrt{A}}{2}$$

osserviamo che $(x_1, y) \neq (x_2, y) =$

~~$\neq (x_2, y)$~~

$$= \frac{-ky \pm \sqrt{A}}{2}$$

$$\frac{-ky + \sqrt{A}}{2} - \frac{-ky - \sqrt{A}}{2} =$$

per cui $y=0 \Rightarrow (x_1, 0) = (x_2, 0) =$

$$= (\sqrt{A}, 0)$$

ma se $y=0 \Rightarrow$ l'unico punto in cui

con $y=0$ è $(0,0)$ perché dove
non c'è $x \neq 0$ ~~$\sqrt{A} > 0$~~

OK

per cui $A > 0 \Rightarrow (0,0) \in W_k \Rightarrow (x_1, y) \neq (x_2, y)$
 ~~$\in W_k$~~

con $g \neq 0 \Rightarrow V_{\Delta} \neq 0$

Ma l'unico pr con $g=0$ è $x^2_{z=0} \Rightarrow (0,0)$

$(V_{\Delta}, 0) \notin W_K \Rightarrow W_K$ non è $\cap 0H$.

ARBITRARIO

$$A = 0 \quad \text{cioè} \quad k = +2$$

$\Rightarrow W_k$ soft.
non banale

$$A < 0 \quad \text{cioè} \quad -2 < k < 2 \quad \Rightarrow W_k = \{(0,0)\}.$$

soft. banale.

$$A > 0 \quad \text{cioè} \quad |k| > 2 \quad \Rightarrow W_k \text{ non è sottospazio}$$

□

• Sia $V(k)$ uno s. vettoriale $\Rightarrow \{0\} \leq V(k) \quad] \text{ sottospazi banali.}$
 $V \leq V(k)$

$$\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}.$$

∞

∞

$\subset$ contengono
7 ma
non =

$$x = \sum_{i=-\infty}^{\infty} 10^i x_i$$

$$x = \sum_{i=-\infty}^{\infty} 10^i x_i \quad \text{con} \quad 0 \leq x_i \leq 9$$

$$y = \sum_{i=-\infty}^{\infty} 10^i y_i$$

$$(x, y) \rightarrow z = \sum_{i=-\infty}^{\infty} 10^{2i} x_i + 10^{2i+1} y_i$$

$$0, \overline{5} = 1$$

$$x_0 x_1 x_2 x_3$$

$$x = 0,125 \dots$$

$$y = 1,378 \dots \rightarrow$$

$$y_0 y_1 y_2 y_3$$

$$10,132758 \dots$$

$$10,317285 \dots$$

$$y_0 x_0 y_1 x_1 \dots$$

Sequenze di generatori di uno spazio vettoriale.

Def: Sia $V(K)$ uno sp. vettoriale sul campo K .
e sia $X \subseteq V(K)$.

Si dice copertura lineare di X il più piccolo (rispetto all'inclusione) sottospazio ~~lineare~~ vettoriale di $V(K)$ che contiene X .

$L(X)$ oppure $\langle X \rangle$

oss: Siano $U, W \subseteq V(K) \Rightarrow U \cap W \subseteq V(K)$

[L'inclusione di due sottospazi è un sottospazio]

DM: Siano $\bar{u}, \bar{v} \in U \cap W$; $\alpha, \beta \in K \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \bar{u}, \bar{v} \in U &\Rightarrow \alpha \bar{u} + \beta \bar{v} \in U & \bar{u}, \bar{v} \in W &\Rightarrow \alpha \bar{u} + \beta \bar{v} \in W \\ &\Rightarrow \alpha \bar{u} + \beta \bar{v} \in U \cap W & & \square \end{aligned}$$

$$f(x) := \bigcup_{\substack{M \supseteq V \\ N \supseteq M}} M$$

$$\begin{aligned} \lambda \supseteq M \supseteq \{ \bar{0} \} & \quad (1) \\ \lambda \supseteq X(x) & \quad (2) \end{aligned} \quad \text{parce que } \phi \neq (x) \quad \text{et } \overline{350}$$

$$\boxed{(x) \neq \bar{0}} \quad \text{parce que}$$

changement
de l'ensemble
X

N.B.:

L dépend
de $V(k)$.

$$(1) \quad X \subseteq f(x)$$

$$(2) \quad f(f(x)) = f(x)$$

pour un ensemble: $x \in W \subseteq V(k)$
 $\Leftrightarrow f(W) = W$.

$$(3) \quad f(x) \subseteq V(k)$$

$$X = \{(1, 2)\}.$$

$$\mathcal{L}_Q(X) = \{(1, 2)\alpha \mid \alpha \in \mathcal{Q}\} \text{ con } X \subseteq \mathcal{Q}^2 \neq (\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$$

$$\mathcal{L}_{\mathbb{N}^2}(X) = \{(1, 2)\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \text{ con } X \subseteq \mathbb{R}^2 \ni (\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$$

$$(1, 2) \in \mathcal{L}_{\mathcal{Q}^2}(\{(1, 2)\}) = W$$

$$x \bar{v} \in W \Rightarrow \alpha \bar{v} \in W \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \{(1, 2)\alpha \mid \alpha \in \mathcal{Q}\} \subseteq \mathcal{L}_Q(X)$$

MA QUESTO È SORT. $\Rightarrow$ FINÈ.

Sia $X \subseteq V(K)$ con $X \neq \emptyset$.

Allora $\mathcal{L}(X)$ consiste di tutte le combinazioni

Teorema:

lineari di un numero finito di elementi

di X .

$$\mathcal{L}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{x}_i \mid \bar{x}_i \in X, \alpha_i \in K, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$\mathcal{L}(X)$

Siano $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ vettori $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ scalari.

Si dice combinazione lineare dei vettori $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ con gli scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ il vettore

$$\alpha_1 \bar{x}_1 + \dots + \alpha_n \bar{x}_n$$

DM: Sia W un sottospazio che contiene $X \Rightarrow$ poiché W è chiuso rispetto alle c.l. v. si ha un numero finito di elementi, si ha

$$\mathcal{L}(X) \subseteq W.$$

$\Rightarrow$ in particolare $\mathcal{C}(X) \subseteq \mathcal{L}(X)$
(invernicendo tutti i sottospazi che convergono X).

per far vedere $\mathcal{C}(X) = \mathcal{L}(X)$ ci basta
mostrare che $\mathcal{C}(X) \subseteq \mathcal{V}(1k)$.

$$\text{Siano } \bar{\mu} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{x}_i \quad \text{e} \quad \bar{\nu} = \sum_{j=1}^m \beta_j \bar{x}_j \quad \bar{x}_i, \bar{x}_j \in X$$

possiamo supporre che i vettori da compariare
nelle 2 somme siano ridotti gli stessi, al più con

$$\text{coeff} = 0.$$

$$\bar{\mu} = \sum_{i=1}^{m+n} \alpha_i \bar{x}_i \quad \bar{\nu} = \sum_{i=1}^{m+n} \beta_i \bar{x}_i$$

Facciamo vedere che $\forall \alpha, \beta \in 1k \quad \alpha \bar{\mu} + \beta \bar{\nu} \in \mathcal{C}(X)$

$$\ell \bar{u} + m \bar{v} = \ell \sum_{i=1}^{m+n} \alpha_i \bar{x}_i + h \sum_{i=1}^{m+n} \beta_i \bar{x}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m+n} (\ell \alpha_i \bar{x}_i + h \beta_i \bar{x}_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m+n} (\ell \alpha_i + h \beta_i) \bar{x}_i \in \mathcal{C}(X) \subseteq \mathcal{L}(X) \quad \square$$

Def: Sia $V(k)$ uno sp. vettoriale $X \subseteq V(k)$

X è un insieme di generatori per $V(k)$ se

$$\mathcal{L}(X) = V(k).$$

$V(k)$ si dice finalmente generato se $\exists X \subseteq V(k)$ tale che $|X| < \infty$ e $\mathcal{L}(X) = V(k)$.

Esempio.

$$|K[x]_{\leq 3}| = \mathcal{L}(\{1, x, x^2, x^3\}) =$$

$$= \mathcal{L}(\{1+x, x^2+x, x^3-x, x+3\}) =$$

$$= \mathcal{L}(\{1, x, x^2, x^3, 2x^2+3x, 5x^3+7\})$$

oss: Se $X \subseteq \mathcal{Y}$ ed X insieme di generatori per $V(K)$

$\Rightarrow Y$ è un insieme di generatori per $V(K)$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &= \mathcal{L}((100), (010), (001)) = \mathcal{L}((111), (011), (101)) \\ &= \mathcal{L}((100), (100), (010), (010), (011)) \end{aligned}$$

Def: Una sequenza di vettori è detta libera (ed i suoi elementi sono detti linearmente indipendenti.)

$$e \quad S = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n) \subseteq V(K)$$

$$e \quad ha \quad \left[\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = \underline{0} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \right]$$

$[S$ libera se e solo se l'unica combinazione lineare
dei suoi elementi che dà $\underline{0}$ è α coefficienti tutti nulli.]

Se S non è libera $\Rightarrow S$ è detta legata ed i suoi
elementi sono detti linearmente dipendenti.

Δ S è legata se $\exists$ una combinazione lineare
dei suoi vettori α coeff. non tutti nulli che
dà $\underline{0}$.

$$\exists (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in K^n, (\alpha_1 \dots \alpha_n) \neq (0 \dots 0) : \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = \underline{0}$$

$$\alpha(100) + \beta(010) + \gamma(001) = (\alpha \beta \gamma) = (000)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma$$

$$\Rightarrow ((100), (010), (001)) \text{ libera.}$$

$$\alpha(101) + \beta(011) + \gamma(001) = \cancel{\alpha(101) + \beta(011)} + \gamma(001) = (\alpha, \alpha + \beta, \alpha + \beta + \gamma) =$$

$$= (000) \Leftrightarrow \alpha = 0$$

$$\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0$$

Libera!

$$\alpha(100) + \beta(200) + \gamma(010) + \delta(011) =$$

$$= (\alpha + 2\beta, \gamma + \delta, \delta) = (000) \Rightarrow$$

$$\delta = 0$$

$$\gamma + \delta = 0 \Rightarrow \gamma = 0$$

$$\alpha + 2\beta = 0$$

$$\alpha = -2\beta \quad \text{Libera!}$$

$$-2(100) + 1 \cdot (200) + 0(010) + 0(011) = (000).$$

Proposizione: Sia $S = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ una sequenza di vettori.

Allora S è l.o.g. $\Leftrightarrow$ almeno uno dei vettori

$\bar{v}_i$ che la compone è

comb. lineare dei rimanenti.

$$[\exists \bar{v}_i \in S : \bar{v}_i \in \mathcal{L}(S \setminus \{\bar{v}_i\})]$$

Dim: Supponiamo S l.o.g. $\Rightarrow \exists (\alpha_1 \dots \alpha_n) \neq (0 \dots 0)$

$$\text{t.d. che } \alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = \vec{0}.$$

Supponiamo wlog (= without loss of generality).

$$\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\alpha_1 \bar{v}_1 = -\alpha_2 \bar{v}_2 - \dots - \alpha_n \bar{v}_n \quad \text{ed } \exists \alpha_i' \in \mathbb{K}$$

$$\Rightarrow \bar{v}_1 = 1 \cdot \bar{v}_1 = \alpha_1^{-1} (\alpha_2 \bar{v}_2) = \alpha_1^{-1} (-\alpha_2 \bar{v}_2 - \dots - \alpha_n \bar{v}_n)$$

$$= -\alpha_1^{-1} \alpha_2 \bar{v}_2 - \dots - \alpha_1^{-1} \alpha_n \bar{v}_n \in \mathcal{L}(S \setminus \{\bar{v}_1\}).$$

Vicversa: supponiamo $\bar{v}_2 \in \mathcal{L}(S \setminus \{\bar{v}_1\}) \Rightarrow$

$\exists \beta_2 \dots \beta_n$ tali che

$$\bar{v}_2 = \beta_2 \bar{v}_2 + \dots + \beta_n \bar{v}_n$$

$$\Rightarrow \bar{v}_2 - \beta_2 \bar{v}_2 - \dots - \beta_n \bar{v}_n = \underline{0}$$

e questa è una c. lineare di $(\bar{v}_2 \dots \bar{v}_n)$ in cui almeno il coeff. di $\bar{v}_2$ è $1 \neq 0$ e che dà $\underline{0}$.

$\Rightarrow S$ degenera.

□.

Oss: Se $\underline{0} \in S = S$ è degenera $S = (\underline{0}, \dots) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{0} = 1 \cdot \underline{0} + \dots$$

Se S contiene 2 vettori uguali, $\bar{v}_2$ e $\bar{v}_2 \Rightarrow S$ è degenera

$$1 \cdot \bar{v}_2 + (-1) \bar{v}_2 + 0 \bar{v}_3 + \dots = \underline{0}$$

Se S contiene 2 vettori proporzionali $\Rightarrow S$ degenera.

$$\alpha \neq 0 \quad \bar{v}_2 = \alpha \bar{v}_1 \Rightarrow$$

$$-\alpha \bar{v}_2 + \bar{v}_1 + 0 \bar{v}_3 + \dots + 0 \bar{v}_n = \underline{0}$$

Se S contiene un vett. che è. c. lineare
dei minimanti $\Rightarrow S$ è legata.

Teoremi degli spazi successivi:

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale su K e

Sia S una sua sequenza di generatori.

Se $S \neq \emptyset$ e S legata $\Rightarrow \exists \bar{s} \in S$ tale che

$$V = \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(S \setminus \{\bar{s}\}).$$

CONSEG. Una sequenza di generatori minimale o è vuota
o è libera.